جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

بنام خدا

ماخ

دفترچه سوالات
مرحله دوم
یازدهمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۷۹

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های تشریحی	سوالات چند گزینه‌ای
۳۲۰	۸	-

توضیحات مهم — **استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.**

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۸ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۳۲۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

۱- **رساندن مهره**

یک سطر نامتناهی از خانه‌های ۱×۱ با شماره‌های ۱، ۲ و ... داده شده است. در ابتدا دو مهره در خانه‌های ۱ و ۲ قرار دارند. در هر مرحله، یکی از دو مهره را به دلخواه انتخاب می‌کنیم و اگر این مهره در خانه‌ی شماره‌ی i باشد، آن را i خانه‌ی خالی به جلو می‌بریم. یعنی درصورتی‌که مهره‌ی دیگر در خانه‌های $i+۱$ تا $۲i$ نباشد، آن را به خانه‌ی $۲i$ و در غیر این صورت به خانه‌ی $۲i+۱$ می‌بریم.

ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n $(n > ۲)$، می‌توان با انجام تعدادی حرکت یکی از مهره‌ها را به خانه‌ی nام برد.

۲- **ماتریس پر مغز**

در ماتریس A با ابعاد $n \times n$، درایه‌ی واقع در سطر i و ستون j را a_{ij} می‌نامیم. ماتریس A را «پر مغز» است، اگر دو خاصیت زیر را داشته باشد:

۱. همه‌ی درایه‌های A برابر ۰ یا ۱ باشند.

۲. به ازای هر k سطر متمایز $p_۱, p_۲, \dots$ و p_k $(۱ \le k \le n)$ حداقل یک ستون j وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که $a_{p_{۱j}} + a_{p_{۲j}} + \dots + a_{p_{kj}}$ فرد باشد.

چند ماتریس $n \times n$ پر مغز وجود دارد؟

۳- پادگان نظامی

در یک پادگان نظامی، n فرمانده و $n^۲$ سرباز حضور دارند. برای اجرا یک عملیات علیه دشمن، باید گروهی از همه‌ی فرمانده‌ها و تعداد دلخواهی سرباز تشکیل شود. برای شناسایی افراد این گروه، به هر کدام از آن‌ها یک کد عملیاتی تخصیص داده می‌شود. کد هر فرد، یک عدد طبیعی است و کد هیچ دو نفری یکسان نیست. به خاطر مسائل امنیتی کدها با این شرط انتخاب می‌شوند: برای هر دو فرد A و B عضو گروه با کدهای a و b، عدد $a+b$ کد یکی دیگر از اعضای گروه است اگر و تنها اگر A و B هر دو فرمانده باشند (توضیح آن‌که به‌غیراز اعضای گروه، به کسی کد داده نمی‌شود).

الف) ثابت کنید برای هر n، می‌توان در پادگانی با شرایط فوق یک گروه انتخاب کرد و به اعضای آن کدهای درست نسبت داد.

ب) نشان دهید در هر کدگذاری درست با $n \ge ۴$ فرمانده، ۳ فرمانده‌ی A و B، C با کدهای a، b و c وجود ندارند که $a+b=c$.

٤- **جایگشت‌های علامت‌دار**

یک جایگشت، یک ترتیب از اعداد ۱، ۲، ... و n است. برای مثال $(۳,۱,۴,۲,۵)$ از اعداد ۱ تا ۵ است. یک جایگشت علامت‌دار از روی یک جایگشت عادی به این شکل به دست می‌آید که صفر یا چند عدد آن جایگشت را منفی می‌کنیم. برای مثال $(-۳,۱,-۴,-۲,۵)$ جایگشتی علامت‌دار است.

اگر $A = (a_۱, a_۲, \dots, a_n)$ یک جایگشت علامت‌دار باشد، دوران (i,j) که در آن $۱ \le i \le j \le n$ آن را به جایگشت علامت‌دار زیر تبدیل می‌کند: $(a_۱, a_۲, \dots, a_{i-۱}, -a_j, -a_{j-۱}, \dots, -a_{i+۱}, -a_i + a_{j+۱}, \dots, a_n)$

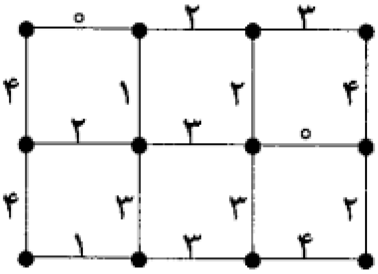
برای مثال با انجام متوالی دوران‌های $(۱,۲)$، $(۲,۳)$ و $(۱,۲)$ روی جایگشت علامت‌دار $(۱,۲,۳)$، به ترتیب جایگشت‌های علامت‌دار زیر به‌دست می‌آیند:

$$(۱,۲,۳) \rightarrow (-۲,-۱,۳) \rightarrow (-۲,-۳,۱) \rightarrow (۳,۲,۱)$$

ثابت کنید دست‌کم $n-۱$ دوران برای تبدیل $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ به $(a_n, a_{n-۱}, \ldots, a_۱)$ لازم است.

۵- **مسیر کوتاه**

یک شبکه $m \times n$ از نقاط را در نظر بگیرید که در آن هر نقطه توسط پاره‌خط‌هایی به نقاط مجاورش در بالا، پایین، چپ و راست (در صورت وجود) وصل است. (طول هر یک از پاره‌خط‌ها را یک واحد فرض کنید.) یک مسیر دنباله‌ای از پاره‌خط‌های به هم متصل این شبکه است. منظور از یک مسیر «کوتاه»، مسیری است که ابتدای آن نقطه‌ی «بالا و سمت چپ» شبکه و انتهای آن نقطه‌ی «پایین و سمت راست» شبکه باشد و نیز یکی از کوتاه‌ترین مسیرهای بین این دو نقطه باشد (یعنی کم‌ترین تعداد پاره‌خط را داشته باشد). عدد طبیعی دلخواه k داده شده است. می‌خواهیم روی هر یک از این پاره‌خط‌ها عددی صحیح از میان اعداد ۰، ۱، ... و $k-۱$ بنویسیم با این شرط که مجموع اعداد پاره‌خط‌های هر مسیر کوتاه، باقی‌مانده‌ی ثابتی در تقسیم بر k داشته باشد. برای مثال در جدول زیر n، m و k به ترتیب برابر ٤، ۳ و ۵ اند. هم‌چنین مجموع اعداد روی پاره‌خط‌های تمامی مسیرهای کوتاه در تقسیم‌بر ۵ باقی‌مانده‌ی ۱ را تولید می‌کنند.



برای هر m,n و k تعداد حالت‌هایی را که می‌توان پاره‌خط‌ها را با شرایط فوق عددگذاری کرد بیابید و ادعای خود را ثابت کنید.

٦- جدول جمعی

یک جدول $n \times n$ (یعنی جدولی که در هر سطر یا ستون n خانه دارد)، جمعی است اگر در هر خانه‌ی آن‌یکی از اعداد ۱، ۰ یا ۱- نوشته شده باشد و عدد هر خانه برابر مجموع اعداد خانه‌های مجاور آن باشد (دو خانه مجاورند اگر در یک ضلع مشترک باشند). هم‌چنین همه‌ی درایه‌های یک ماتریس جمعی صفر نیستند.

الف) برای $n = ۴$ یک جدول جمعی بسازید.

ب) ثابت کنید اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم n بر ۵ برابر ٤ باشد، می‌توان یک جدول جمعی $n \times n$ ساخت (ممکن است برای n های دیگر نیز بتوان این کار را انجام داد).

۷- وزنه‌ها

۱۳۸۰ وزنه با وزن‌های $x_۱, x_۲, \ldots$ و $x_{۱۳۸۰}$ داریم. می‌دانیم وزن هیچ دو وزنه‌ای برابر نیست، اما وزن هیچ‌کدام از وزنه‌ها را نمی‌دانیم. تنها اطلاعی که از وزنه‌ها داریم این است که اگر وزنه‌ها را برحسب وزن آن‌ها از سبک به سنگین بچینیم و به دنباله‌ی وزنه‌های $x'_۱, x'_۲, \ldots$ و $x'_{۱۳۸۰}$ برسیم.

الف) به ازای iهای زوج، $x_i = x'_i$

ب) به ازای iهای فرد، اگر $x_i = x'_j$ آن‌گاه $x_j = x'_i$.

وزنه‌ی y داده شده است. می‌خواهیم با کم‌تر از ۲۵ مقایسه مشخص کنیم آیا y با هیچ کدام از وزنه‌های x_1، x_2، ... و x_{180} هم‌وزن است یا خیر. روشی برای این کار ارائه کنید. توجه کنید که هر مقایسه عبارت است از قرار دادن دو وزنه در دو کفه‌ی یک ترازوی دو کفه‌ای.

۸- **استان‌ها**

کشوری شامل دو استان است و هر استان از $2n$ شهر تشکیل شده است. به هر شهر یک کد $n+1$ رقمی با ارقام صفر و یک اختصاص داده‌ایم، به طوری که کد هر شهر از استان اول شامل تعداد فردی رقم یک و کد هر شهر از استان دوم شامل تعداد زوجی رقم یک است ونیز کد هیچ دو شهری یکسان نیست.

در این کشور بین هر دو شهر که کد آن‌ها دقیقا در یک رقم تفاوت دارد، یک خط تلفن مستقیم کشیده شده است. اگر مجموعه‌ی A از تعدادی از شهرهای این کشور تشکیل شده باشد، $F(A)$ مجموعه‌ی شهرهایی است که بین هر کدام از آن‌ها و تعداد فردی از شهرهای مجموعه‌ی A مستقیما خط تلفن موجود باشد.

ثابت کنید اگر n زوج باشد و تمام اعضای A را از استان اول انتخاب کنیم، آن‌گاه $F(F(A)) = A$.